Toma 2013

UNION DES COMORES	OFFICE NATIONAL DES EXAMENS ET CONCOURS	
BACCALAUREAT		**Session : 2004**
euve de : MATHEMATIQUES	**Durée : 4 h** / **Série : C**	**Coef : 5** / **N° du feuillet : 1/2**

Exercice 1 : (5 Points)

Soit un quadrilatère direct ABCD formé par deux triangles :
L'un ABC isocèle en A et l'autre ACD rectangle et isocèle en C avec (AC) une droite verticale ; AB = 4 cm et mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$

1. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.
2. Soit r la rotation de centre A, transformant B en C et r' la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On note : $f = r' \circ r$ et $g = r \circ r' \circ r$

a. Déterminer les images de A et B par f.
Soit P un point appartenant au segment [AD] tel que AP = 4cm.
b. Déterminer l'image de B par g.
c. Démontrer que f est une rotation, dont on précisera ses éléments caractéristiques.
(on notera I son centre dont on justifiera la construction)
d. Déterminer la nature de g et préciser son élément géométrique.
3. Soit S la similitude plane directe de centre I transformant A en B.
a. Déterminer l'angle θ de S.
b. Soit C' le centre du cercle circonscrit au triangle (BIC).
Montrer que C' est l'image de C par S.
c. Soit k le rapport de S et S' la similitude plane directe de centre I, de rapport $k' = \frac{2\ IA}{IB}$ et d'angle $\alpha = -\frac{\pi}{8}$.
Déterminer la nature et les éléments géométriques de S' o S.

Exercice 2 : (5 Points)

1. Trouver le reste de la division par 7 du nombre $A = 247^{2005}$
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,(E) est l'ensemble des points M(x, y) vérifiant : $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$

a. Montrer que (E) est une conique, dont on donnera la nature et les éléments caractéristiques : (sommets, foyers, excentricité et les directrices).
b. Tracer (E)
c. Montrer que (E) vérifie l'équation : $4(x^2 + y^2) = (x-3)^2$.

Soit M un point de (E) ; on pose : $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

d. Démontrer que : $OM = \frac{1}{2}(3 - x)$ et en déduire que : $OM = \frac{3}{2 + \cos\theta}$

e. On suppose que $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
La droite (d) d'équation x = 3 est une directrice de (E).
la droite (OM) coupe la droite (d) en un point I et recoupe (E) en un point M'.
Démontrer que :

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM} = \frac{4}{3} \quad \text{et puis} \quad \frac{1}{OM} - \frac{1}{OM} = \frac{2}{OI}$$

Oumma

Problème: (10 Points)

A] A tout entier naturel $n \geq 1$, on associe la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle

$$E = [\,1\,;+\infty\,[\text{ par : } \quad f_n(x) = \frac{1}{n!}\,\frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

1.En remarquant que $\dfrac{(\ln x)^n}{x^2} = \left(\dfrac{\ln x}{x^{2/n}}\right)^n$,déterminer la limite de f_n lorsque $x \longrightarrow +\infty$

2.a. Calculer $f_n'(x)$ et vérifier que $f_n'(e^{n/2}) = 0$

b. Donner le tableau de variation de f_n.

c. vérifier que la valeur maximale de f_n sur E est : $y_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$

3.On se propose d'étudier la suite $(y_n)_{n\geq 1}$.

Soit n un entier strictement positif.

a. Calculer, pour $x \geq 1$; $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

b. Montrer que : $y_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$ et que $0 < y_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} y_n$ pour tout entier n non nul

c. En déduire que : $y_n \leq \dfrac{1}{e}\,\dfrac{1}{2^n}$ puis déterminer la limite de la suite $(y_n)_{n\geq 1}$

B] A tout entier $n \geq 1$ et à tout nombre réel x de E , on associe l'intégrale $I_n(x) = \displaystyle\int_1^x f_n(t)\,dt$

1.a.Soit k un entier supérieur ou égale à 1.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour x élément de E, $I_1(x)$.

b. Grâce à une intégration par parties ; démontrer la relation :

$$I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{(k+1)!}\,\frac{(\ln x)^{k+1}}{x}$$

c. En déduire que tout entier $n \geq 1$:

$$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!\,x} - \ldots\ldots - \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!\,x} - \frac{(\ln x)^n}{n!\,x}$$

2. Soit α un nombre réel fixé supérieur ou égale à 1.

Montrer que $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha-1)\,y_n$ et en déduire la limite de $I_n(\alpha)$ quand n tend vers $+\infty$

3. Pour $n \geq 1$ et $x \geq 1$, on pose : $W_n(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{1!} + \dfrac{(\ln x)^2}{2!} + \ldots\ldots + \dfrac{(\ln x)^n}{n!}$

a. Exprimer $W_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.

b. $\alpha \geq 1$ étant un nombre réel fixé, déterminer la limite de $W_n(\alpha)$quand $n \to +\infty$

c. En déduire la limite λ de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de terme général : $U_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$